Royaume du Maroc
المملكة المغربية

Minitère de l'Education Nationale, du Préscolaire et des Sports
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

Académie Hassan II des Sciences et Techniques
أكاديمية الحسن الثاني للعلوم و التقنيات

Juillet 2019 **Sujet de Mathématiques** **Durée : 4h**

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2017, est composé d'un problème.
Pour répondre à une question de ce problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précédent, même si ne l'ai a pas traité, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées
Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 :

Irrationalité et divisibilité de certains nombres réels

Notation, définitions et rappels :

1. **Coefficient binomial :**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on définit : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial usuel.
   Par convention, on pose $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$.
2. **Dérivées successives d'une fonction :** Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur I, soit p un entier naturel non nul. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. On dit que la fonction f est une fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I, dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où f' la fonction dérivée de f, où f' la fonction dérivée de f, $f^{(1)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre 1 de la fonction f.
   On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas, on pose $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ ou $(f^{(1)})'$ la fonction dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre 2 de f, la fonction $f^{(2)}$ s'appelle aussi la dérivée seconde de f et se note f''.
   Par récurrence, on dit que la fonction f est p-fois dérivable sur I avec $p \geq 2$, si la fonction $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas on pose $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$, où $(f^{(p-1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(p-1)}$, $f^{(p)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre p de la fonction de f.
3. **Polynômes à coefficients réels :**
   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Tout entier naturel n correspond à un degré fini.
   On rappelle que :
   - Tout polynôme $P \in \mathcal{P}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire dérivable à tout ordre.
   - Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, si : $k \geq n+1$ alors $P^{(k)} = 0$
   - Pour tout couple de polynômes $P, Q \in \mathcal{P}$, on a :

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \quad \text{et} \quad \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Partie 1 :

Quelques résultats préléminaires

1.1. Formule de Taylor pour les fonctions polynomiales :

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $P \in \mathbb{P}_n$, on a la formule de Taylor suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1}$$

1.2. Application 1 :

Soit n un entier naturel strictement positif. On définit la suite de polynômes U_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_n(x) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}.$$

1.2.1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$.

1.2.2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les dérivées $U_n^{(n+k)}(0)$ et $U_n^{(n+k)}(1)$ sont des entiers naturels non nuls.

1.3. Application 2 : ordre de multiplicité d'une fonction polynomiale

Soit P un polynôme non nul. Soit r un entier naturel non nul, et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

Définition : On dit que x_0 est la racine de P d'ordre r, si et seulement si, il existe $Q \in \mathcal{P}$, tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - x_0)^r Q(x) \\ Q(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que r est le plus petit entier tel que :

$$P^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, r-1\}, \quad \text{et} \quad P^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

1.4. Formule de Leibniz des dérivées n-ième d'un produit de fonctions :

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et soit n un entier naturel non nul. On considère deux fonctions $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivables sur I.

Montrer que la fonction fg est n fois dérivable sur I et que

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \tag{2}$$

Indication : On peut utiliser un raisonnement par récurrence et l'identité suivante :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

1.5. Formule d'intégration par parties :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit n un entier naturel non nul.

On considère deux fonctions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivables sur $[a, b]$, telles que $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ soient continues sur $[a, b]$.

On établit alors la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_a^b f^{(n)}(t) g(t) \mathrm{d}t = (-1)^n \int_a^b f(t) g^{(n)}(t) \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(f^{(n-k)}(b) g^{(k-1)}(b) - f^{(n-k)}(a) g^{(k-1)}(a) \right) \tag{3}$$

1.6. Étude de quelques suites :

1.6.1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tende vers 0.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également, et que sa limite est 0.

1.6.2. Soit λ un réel non nul. Montrer que la suite $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0.

1.7. Condition nécessaire à l'irrationalité d'un nombre : Pour tout réel θ non nul, on définit :

$$\theta\mathbb{Z} = \{k\theta \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{k + k'\theta \mid (k, k') \in \mathbb{Z}^2\}$$

1.7.1. Supposons que $\theta = \dfrac{p}{q}$ avec $\text{PGCD}(p,q) = 1$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, alors $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$

1.7.2. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de nombres entiers relatifs telle que $k_n \to 0$, alors il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad k_n = 0$$

1.7.3. Soit φ un réel non nul. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'entiers relatifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n\varphi - q_n \neq 0$$

Supposons que la suite $(p_n\varphi - q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors le réel φ est irrationnel.

Partie 2 :

Irrationalité de e^r
Pour tout nombre rationnel r non nul

Le but de cette partie est de démontrer que e^r est irrationnel pour tout nombre rationnel r non nul.

2.1. Base logarithmique naturelle :

On introduit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

2.2.1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est le nombre e.

2.2.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < e < v_n$, et en déduire que : $2.66 < e < 2.71$

2.2.3. **L'irrationalité de e :** On raisonne par l'absurde et on suppose que e est rationnel, c'est-à-dire $e = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q \geq 1$, p et q premiers entre eux. Montrer que $q!u_q$ est un entier naturel et trouver la contradiction.

On introduit les deux fonctions polynomiales U_n et L_n définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = U_n^{(n)}(x)$$

Et on pose :

$$T_n(x) = \int_0^1 x^t L_n(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.2. Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$T_n(x) = (-1)^n x^n \int_0^1 e^{xt} U_n(t)\mathrm{d}t$$

Et que $T_n(x) \neq 0$.

2.3. Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$|x^n T_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{4^n n!}\max(1, e^x)$$

Puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n T_n(x) = 0$.

2.4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux polynômes Q_n et P_n à coefficients entiers positifs et de degré au plus n, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{2n+1} T_n(x) e^{-x} = Q_n(x)e^{-x} - P_n(x)$$

Indication : On pourra utiliser la formule d'intégration par parties (3) et le résultat de la question **2.2.1** de la première partie.

2.5. Montrer l'irrationalité de e^r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

2.6. En déduire que pour tout nombre rationnel r non nul, e^r est irrationnel. En déduire que $\ln(\alpha)$ est irrationnel pour tout entier α strictement positif et différent de 1.

Partie 3 :

Quelques résultats sur les fonctions polynomiales

À toute fonction polynomiale P de $\mathscr{P}$ de degré $n \geq 1$, on associe la fonction polynomiale Q_P définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_P(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$$

3.1. Vérifier que pour toute fonction polynomiale P de $\mathcal{P}$ de degré $n \geq 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_P(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$$

3.2. En déduire que pour toute fonction polynomiale P de $\mathcal{P}$ de degré $n \geq 0$, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \int_0^1 e^{a(1-t)} P(at)\mathrm{d}t = e^a Q_P(0) - Q_P(a) \tag{4}$$

3.2.1. Vérifier que l'identité (4) est vraie pour toute fonction polynomiale P.

3.2.2. En déduire, par récurrence, que l'identité (4) est vraie pour tout entier naturel n et pour toute fonction polynomiale P de $\mathcal{P}$ de degré n. *Indication :* on pourra utiliser le raisonnement par récurrence.

3.3. Soit V une fonction polyômiale à coefficients entiers positifs, de degré $n \geq 1$, et définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad V(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Tels que $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont des entiers naturels.
Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction polynomiale F suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} V(x).$$

3.3.1. Déterminer le degré de la fonction polynomiale F.

3.3.2. Soit m le degré de la fonction F et $a_0, a_1, \cdots, a_m$ ses coefficients. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m.$$

Exprimer les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ en fonction des entiers $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

3.3.3. Montrer que $Q_F(0)$ est un nombre entier.
Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

3.3.4. Montrer que le nombre $Q_F(0) - V(0)$ est divisible par p.

3.4. Soit W une fonction polynomiale à coefficients entiers, de degré $n \geq 1$. Soit $p \geq 2$ un entier naturel. On définit le polynôme P par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{n(p-1)} (W(x))^p.$$

3.4.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, (n+1)p - 1\}$ et tout réel x, on a :

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(k, p-1)} \binom{k}{j} \frac{1}{(p-j-1)!} x^{p-j-1} (W^p)^{k-j}(x).$$

3.4.2. En déduire que :

$$P^{(p-1)}(0) = (W(0))^p.$$

3.4.3. Montrer que pour tout $r \in \{p, \cdots, (n+1)p - 1\}$, les coefficients de $P^{(r)}$ sont divisibles par p.

Partie 4 :

Transcendance du nombre e

Définitions :

- On dit qu'un nombre réel α est **algébrique** s'il existe un polynôme non nul à coefficients entiers dont α est une racine.

- Tout nombre qui n'est pas algébrique est appelé **transcendant**.

4.1. Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est un nombre algébrique.

Le but restant de ces questions est de démontrer que le nombre e est transcendant, en s'appuyant sur un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc que e est un nombre algébrique, donc racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.

Autrement dit, il existe un entier naturel $n \geq 1$ et des entiers relatifs $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que :

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0, \quad \text{avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z},\ a_0 a_n \neq 0.$$

On fixe un entier p et on définit le polynôme borné P par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^p (x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

Et on pose :

$$R_P(\alpha) = \alpha \int_0^1 e^{\alpha(1-t)} P(\alpha t)\, \mathrm{d}t, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

4.2. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j e^j Q_P(0) = 0$, puis montrer que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j \left(Q_P(j) + R_P(j)\right)$.

Indication : Vous pouvez utiliser la formule (4) du **Partie 3**.

4.3. Montrer que :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \quad |R_P(j)| \leq \frac{(n!n)^p e^n}{(p-1)!}$$

4.4. On pose $M = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |a_j|$.

4.4.1. Montrer que :

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j R_P(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| \leq M n^2 n! e^n \frac{(n!n)^{p-1}}{(p-1)!}$$

4.4.2. Montrer qu'on peut choisir le nombre premier p tel que : $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| < 1$

4.5. Montrer que $Q_P(1), \cdots, Q_P(n)$ sont divisibles par p.

4.6. Montrer que $Q_P(0) - (-1)^{np}(n!)^{np}$ est divisible par p.

4.7. Montrer que si $p > \max(n, |a_0|)$ alors $a_0 Q_P(0)$ n'est pas divisble par p, puis en déduire que :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q_P(j) = a_0 Q_P(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q_P(j) \neq 0$$

4.8. En choisissant convenablement le nombre premier p, Trouver une contradiction, qui permet de conclure que le nombre e est transcendant.

Fin du sujet