



Juillet 2016

Sujet de Mathématiques

Durée : 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2016, est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traité dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question de ce problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même si ne l'ai pas traité, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice :

L'intégrale de Poisson

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Poisson, définie par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) d\theta, \quad r \in]-1, 1[\quad (1)$$

Partie 1 :

Calcul d'un premier intégrale

Pour tout r de $] -1, 1[$ on considère la fonction P_r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_r(\theta) = \Re \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right)$$

1.1. Montrer que pour tout réel θ on a : $P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos \theta + 1}$.

1.2. Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $-\pi < a < b < \pi$, on a :

$$\int_a^b P_r(\theta) d\theta = 2 \int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + t^2(1 + r)^2} dt$$

1.3. En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 2\pi$.

Partie 2 :

Calcul de l'intégrale de Poisson

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_θ définie sur $] -1, 1[$ par :

$$\forall r \in] -1, 1[, \quad f_\theta(r) = \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1)$$



2.1. Montrer que la fonction f_θ est deux fois dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et que :

$$\forall r \in] -1, 1[, \quad |f''_\theta(r)| \leq \frac{12}{(1 - |r|)^4}$$

2.2. Soit R un élément de l'intervalle $]0, 1[$. Dédurre de ce qui précède que pour tout élément r de l'intervalle $[-R, R]$ et tout nombre réel h tel que $r + h \in [-R, R]$ et $h \neq 0$, on a :

$$|f(r + h) - f(r) - hf'(r)| \leq \frac{h^2}{2} \times \frac{12}{(1 - R)^2}.$$

Indication : on peut utiliser l'intégration par parties.

2.3. Soit ψ la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$\forall r \in] -1, 1[, \quad \psi(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) d\theta$$

2.3.1. Montrer que la fonction ψ est dérivable sur $] -1, 1[$ et que :

$$\forall r \in] -1, 1[, \quad \psi'(r) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - \cos \theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} d\theta$$

2.3.2. Calculer l'intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} d\theta$, et déduire que ψ est constante.

2.4. Trouver la valeur de l'intégrale (1), *intégrale de Poisson*.

Problème :

Étude des suites récurrentes linéaires

Notation, définitions et rappels :

1. Coefficient binomial :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial usuel.

Par convention, on pose $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$.

2. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur $\mathbb{R}$, et Δ l'application définie sur l'ensemble $\mathcal{F}$ par :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto \Delta(f) \end{aligned}$$

Où, à toute fonction f de $\mathcal{F}$, on associe la fonction bornée $\Delta(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

3. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et à coefficients réels, et pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

4. Pour tout polynôme P de $\mathcal{P}_{r-1}$, on note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^j = x^{r-1} - a_{r-1} x^{r-2} - \dots - a_1 x - a_0$$

On considère l'ensemble $\mathcal{U}_P$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + \dots + a_r u_n = \sum_{q=0}^{r-1} a_q u_{n+q} \quad (\mathcal{E}_P)$$

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{U}_P$ et de déterminer une expression générale de ses éléments en fonction des racines du polynôme P .

Partie 1 :

Étude de quelques propriétés de la fonction Δ

Soit $f \in \mathcal{F}$, on rappelle que $\Delta(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Et on définit aussi la fonction $\Delta^2(f)$ par $\Delta^2(f) = \Delta(\Delta(f))$, et par récurrence on définit la fonction $\Delta^n(f)$ par :

$$\Delta^n(f) = \Delta(\Delta^{n-1}(f))$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$.

1.1. Soit $f \in \mathcal{F}$ et x un réel. Calculer $\Delta^2(f)(x)$ en fonction de $f(x)$, $f(x+1)$ et $f(x+2)$.

1.2. Soit $f \in \mathcal{F}$ et x un réel. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k) \quad (2)$$

Indication : Utiliser la formule de Pascal :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

1.3. Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré $n \geq 1$, on pose :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

1.3.1. Montrer que $\Delta(P)$ est une fonction polynômiale de $\mathcal{P}$ de degré $(n-1)$ en identifiant son coefficient dominant.

1.3.2. Déterminer le degré de la fonction polynômiale $\Delta^n(P)$, puis montrer que $\Delta^{n+1}(P) = 0$.

1.4. Soit $P \in \mathcal{P}_{r-1}$ tel que $r \geq 2$, montrer que $\Delta^r(P) = 0$, puis en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(x+r) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} P(x+k) \quad (3)$$

1.5. Soit $m \geq 1$ un entier naturel, en déduire d'après **1.3.1.** que $\Delta(\mathcal{P}_m) \subset \mathcal{P}_m$.

Nous visons ici à démontrer l'inclusion suivante : $\mathcal{P}_{m-1} \subset \Delta(\mathcal{P}_m)$ Pour cela, on considère une fonction polynômiale $B \in \mathcal{P}_{m-1}$ donnée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k.$$

1.5.1. Soit A une fonction polynômiale de $\mathcal{P}_m$, on pose $A(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\Delta(A) = B \iff \begin{cases} b_r = \sum_{k=r+1}^m a_k \binom{k}{r} \\ 0 \leq r \leq m-1 \end{cases} \quad (4)$$

1.5.2. Supposons dans cette question que $m = 3$. Montrer que le système (4), d'inconnue (a_1, a_2, a_3) admet une solution unique.

1.5.3. Montrer que $B \in \Delta(\mathcal{P}_m)$.

Indication : Vous pouvez montrer par récurrence que le système (4), d'inconnue $(a_1, \dots, a_m)$, admet une unique solution, en identifiant la valeur de a_m .

1.6. Soit $m \geq 1$ un entier naturel et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathcal{P}_m, \exists S \in \mathcal{P}_m, \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \alpha S(x+1) - S(x)$$

Indication : Vous pouvez utiliser la méthode utilisée pour répondre à **5.1.** ci-dessus.

Partie 2 :Étude de l'ensemble $\mathcal{U}_P$ dans le cas

$$P(x) = (x-1)^r, \quad r \geq 2$$

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 2$, on note P_r le polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_r(x) = (x-1)^r$$

2.1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite, montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{U}_{P_r}$ si et seulement si elle satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+r} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} u_{n+k}$$

2.2. Soit Q un polynôme de $\mathcal{P}_{r-1}$, montrer que la suite $(Q(k))_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}_{P_r}$.**2.3.** Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle appartenant à l'ensemble $\mathcal{U}_{P_r}$, on définit la fonction polynomiale Q_u définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k L_k(x)$$

Où L_k est la fonction polynomiale définie pour chaque $k \in \{0, \dots, r-1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \frac{x-j}{k-j}$$

2.3.1. Soit k un nombre dans l'ensemble $\{0, \dots, r-1\}$. Montrer que L_k est une fonction polynomiale de degré $r-1$, appartenant à $\mathcal{P}_r$, et qu'elle satisfait la propriété suivante :

$$\forall i \in \{0, \dots, r-1\}, \quad L_k(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

2.3.2. Vérifier que pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$, on a $Q_u(i) = u_i$.**2.3.3.** Montrer que $Q_u \in \mathcal{P}_{r-1}$ vérifie que $Q_u(k) = u_k$ pour tout entier naturel k .**2.4.** Montrer que $\mathcal{U}_{P_r} = \{(Q(k))_{k \in \mathbb{N}} \mid Q \in \mathcal{P}_{r-1}\}$.**Partie 3 :**Étude de l'ensemble $\mathcal{U}_P$ dans le cas généralLe but de cette partie est de déterminer une expression explicite pour les éléments de l'ensemble $\mathcal{U}_P$, à l'aide des racines du polynôme P .**3.1. 1^{er} cas :** $P(x) = x - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.Montrer dans ce cas que l'ensemble $\mathcal{U}_P$ est constitué des suites géométriques de raison λ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{U}_P = \{(a\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

3.2. 2^{ème} cas : $P(x) = x^r$ où $r \geq 2$.Montrer que dans ce cas que l'ensemble $\mathcal{U}_P$ est constitué des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+r} = 0$$

3.3. 3^{ème} cas : $P(x) = (x - \lambda)^r$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r \geq 2$.On considère la fonction polynomiale P_r définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_r(x) = (x-1)^r$$

3.3.1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence suivante :

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \iff \left(\frac{u_k}{\lambda^k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

3.3.2. En déduire que :

$$\mathcal{U}_P = \left\{ (\lambda^k Q(k))_{k \in \mathbb{N}} \mid Q \in \mathcal{P}_{r-1} \right\}$$

3.4. Propriété importante : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soient P et R deux fonctions polynômiales appartenant à $\mathcal{P}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - \lambda)R(x)$$

3.4.1. On pose : $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $R(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on suppose que $n \geq 2$. On montre que :

$$\begin{cases} a_0 = -\lambda b_0 \\ a_n = b_{n-1} \\ a_k = b_{k-1} - \lambda b_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

3.4.2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence suivante :

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_P \iff (u_{k+1} - \lambda u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_R$$

3.5. 4^{ème} cas : On définit $P(x) = (x - \lambda)(x - \mu)^r$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \neq 0$, et $r \geq 2$.
Montrer que :

$$\mathcal{U}_P = \left\{ (a\lambda^k + \mu^k R(k))_{k \in \mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R}, R \in \mathcal{P}_{r-1} \right\}$$

Indication : Vous pouvez utiliser le résultat de **2.3.3.** et **1.6** tel que $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$.

3.6. 5^{ème} cas : Sans utiliser le résultat de la question **2.3.3.**, proposer une autre méthode pour répondre à la question **4.3.**, dans le cas où les deux nombres μ et λ sont distincts.
Montrer que :

$$\mathcal{U}_P = \left\{ (\lambda^k Q(k))_{k \in \mathbb{N}} \mid Q \in \mathcal{P}_r \right\}$$

Indication : Vous pouvez utiliser le résultat de la question **5.1.**

3.7. Le cas général : On définit $P(x) = \prod_{k=1}^r (x - \lambda_k)^{m_k}$, où $r \geq 2$ est un entier naturel, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des réels deux à deux distincts, et $m_1, \dots, m_r$ sont des entiers naturels non nul.
Montrer que les éléments de l'ensemble $\mathcal{U}_P$ sont les suites numériques qui s'écrivent sous la forme suivante :
$$\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k R_k(n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{où, pour chaque entier } k \in \{1, \dots, r\}, R_k \text{ est une fonction polynômiale appartenant à l'ensemble } \mathcal{P}_{r-1}.$$

Partie 4 : Applications

4.1. On considère le polynôme P définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72$$

4.1.1. Factoriser le polynôme P sachant que 2 est son racine d'ordre de multiplicité 3.

4.1.2. Identifier toutes les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+5} = 12u_{n+4} - 57u_{n+3} + 134u_{n+2} - 156u_{n+1} + 72u_n$$

4.2. Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a \neq 1$, trouver les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (a+1)u_{n+1} + au_n = b^n$$

Indication : Vous pouvez étudier les cas $b \notin \{1, a\}$, $b = a$ et $b = 1$.

Fin du sujet