



Juillet 2015

Sujet de Mathématiques

Durée : 4h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2015, est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traité dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question de ce problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même si ne l'ai pas traité, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice :

Étude d'une suite d'entiers naturel

Dans cet exercice, on note :

- PGCD(a, b) pour le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels a et b .
- PPCM(a, b) pour le plus petit commun multiple de ces deux mêmes entiers.

Soient deux suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ de nombres entiers naturels non nuls, non stationnaires, satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_0 \geq 2, q_0 \geq 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \text{PGCD}(p_n, q_n) + 1, \quad q_{n+1} = \text{PPCM}(p_n, q_n) - 1. \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe deux entiers naturels N et $c > 0$ tels que :

$$\forall n \geq N, \quad p_{n+c} = p_n.$$

Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = p_n + q_n$, et on considère l'ensemble

$$\mathcal{R}_n = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \geq p_n \text{ et } m \nmid s_n\}$$

Partie 1 :

Construction d'une suite décroissante d'entiers naturels

1.1. Montrer que $\mathcal{R}_n \neq \emptyset$ pour tout entier naturel n .

Pour tout entier naturel n , on note $r_n = \min \mathcal{R}_n$.

1.2. Soit n un entier naturel non nul $p_n | q_n$, Déterminer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n , puis déterminer s_{n+1} en fonction de s_n .

On vise ci-après à démontrer la propriété suivante $(r_k)_{k \geq 1}$ décroissante, on suppose qu'il existe un entier naturel strictement inférieur à n .

1.3. On suppose que $p_n | q_n$, montrer alors que $p_n \notin \mathcal{R}_n$ puis en déduire que $r_{n+1} = r_n$.

1.4. On suppose que $p_n \nmid q_n$.

1.4.1. Montrer que $r_n = p_n$.

1.4.2. Montrer que $p_{n+1} \leq p_n$.

1.4.3. Montrer que $p_n \in \mathcal{R}_n$, puis en déduire que $r_{n+1} \leq r_n$.

Partie 2 :

Création et étude d'une suite décroissante d'entiers naturels

- 2.1. Montrer que la suite $(r_k)_{k \geq 1}$ est convergente et déterminer sa valeur limite.
- 2.2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $r_n = r_{n_0}$.
On pose par la suite $y_n = \text{PGCD}(r, s_n)$ pour tout $n \geq 0$, et $r = \min\{r_k \mid k \geq 1\}$.
- 2.3. Montrer l'existence de r , puis montrer qu'un entier naturel N existe tel que $r = r_N$.
- 2.4. Montrer que pour tout $n \geq N$, on a $r = r_N$.
- 2.5. La suite $(y_n)_{n \geq N}$ est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un $n \geq N$ tel que $y_n = y_{n+1}$.
 - 2.5.1. Supposons que $p_n \mid q_n$, montrer alors que $y_n = y_{n+1}$.
 - 2.5.2. Supposons que $p_n \nmid q_n$, montrer que $s_{n+1} = y_n + \frac{p_n q_n}{y_n}$, en déduire que $y_{n+1} = y_n$.
- 2.6. Conclure en démontrant ce qui est demandé dans cet exercice.

Problème :

Comparaison entre les normes uniformes des dérivées successives d'une fonction

Notation, définitions et rappels :

1. Coefficient binomial :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial usuel.

Par convention, on pose $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$.

2. Dérivées successives, classe d'une fonction :

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur I , soit n un entier naturel non nul.

- On dit que la fonction f est une fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I , dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où f' est la fonction dérivée de f , $f^{(1)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre 1* (ou *dérivée première*) de la fonction f .
- On dit que la fonction f , est deux fois dérivable sur I si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur I , dans ce cas, on pose $f^{(2)} = (f^{(1)})'$, où $(f^{(1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre 2* (ou *dérivée seconde*) de la fonction f et peut aussi se noter f'' .
- Par récurrence, on dit que la fonction f est n -fois dérivable sur I si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I , dans ce cas, on pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, où $(f^{(n-1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre n* (ou *dérivée n -ième*) de la fonction f .
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, sur I si elle est p -fois dérivable sur I et $f^{(p)}$, sa dérivée d'ordre p , est de plus continue sur I . Par convention, on pose $f^{(0)} = f$ et on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si elle est continue sur I .
- On dit que f est *indéfiniment dérivable* (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur I si elle est p -fois dérivable sur I , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

3. Continuité d'une fonction à valeurs bornées :

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I .

On dit que g est une fonction bornée sur I s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\forall x \in I, |g(x)| \leq M \quad (1)$$

Dans ce cas, on note $\|g\|_\infty$ le plus petit réel M satisfaisant l'inégalité (1), et on appelle ce nombre la norme uniforme de la fonction g , ou encore la borne supérieure de $|g|$.

Propriété : La norme uniforme de g se caractérise par :

- (i) Pour tout $x \in I$, on a $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$.
- (ii) Pour tout réel $M \geq 0$ vérifiant (1), on a $\|g\|_\infty \leq M$.

4. Dans ce problème, on considère un entier naturel non nul n , et on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, appartenant à la classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, telles que les fonctions f et $f^{(n)}$ soient toutes les deux bornées sur $\mathbb{R}$.

Le but de ce problème est de montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_n$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{F}_k$ pour tout entier k de $1, \dots, n$:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$$

Nous chercherons aussi à déterminer le majorant du nombre $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$, où $1 \leq k \leq n$, en fonction de $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$ pour tout f de $\mathcal{F}_n$.

Partie 1 :

Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale
Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Soient a et b deux réels distincts de I . Pour tout entier k de l'ensemble $0, 1, \dots, n-1$, on pose :

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

1.1. Montrer pour tout k de $\{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$$

1.2. Dédurre la formule de Taylor d'ordre $n-1$ avec reste sous forme intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad (2)$$

1.3. Inégalité de Taylor-Lagrange d'ordre $n-1$: Supposons que la fonction $f^{(n)}$ est bornée sur I et soit M un réel positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

Montrer que :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} M \quad (3)$$

1.4. Application : On considère la fonction h définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par :

$$\forall t > -1, \quad h(t) = \ln(1+t)$$

Et on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

1.4.1. Montrer que $h \in \mathcal{C}^n$ sur $] -1, +\infty[$ pour tout entier naturel $n \geq 0$, et que :

$$\forall t > -1, \quad h^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+t)^n}$$

1.4.2. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

1.4.3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

1.4.4. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est $\ln 2$.

Partie 2 :

Étude des inclusions $E_3 \subset E_2 \subset E_1$

2.1. Étude du cas $n = 2$:

Soit f une fonction non nulle de l'ensemble $\mathcal{F}_2$.

Rappelons que les deux fonctions f et $f^{(2)}$ sont bornées, et posons :

$$M_0 = \|f\|_{\infty} \quad \text{et} \quad M_2 = \|f^{(2)}\|_{\infty}$$

2.1.1. Soit x un réel, et $h > 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange trouver une majoration de $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$. En déduire que :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

2.1.2. Montrer que $M_2 > 0$ et $M_0 > 0$.

2.1.3. Montrer que la fonction f' est bornée et que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.



2.2. Étude du cas $n = 3$: Soit f une fonction non nulle de l'ensemble $\mathcal{F}_3$.

Rappelons que les deux fonctions f et $f^{(3)}$ sont bornées, et posons :

$$M_0 = \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad M_3 = \|f^{(3)}\|_\infty$$

2.2.1. Soit x un réel, et $h > 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange trouver une majoration de $\left| f(x+h) - \right.$

$$\left. f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) \right| \quad \text{et} \quad \left| f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) \right|. \text{ En déduire que :}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6} \quad \text{et} \quad |f^{(2)}(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3 h}{3}$$

2.2.2. Montrer que $M_3 > 0$ et $M_0 > 0$.

2.2.3. Montrer que la fonction f' est bornée et que $M_1 \leq \frac{1}{2} \sqrt[3]{9M_0^2 M_3}$.

2.2.4. Montrer que la fonction $f^{(2)}$ est bornée et que $M_2 \leq \sqrt[3]{3M_0 M_3^2}$.

Partie 3 :

Transformation binomiale de Pascal

L'objectif de cette partie est de démontrer la formule de transformation binomiale (4) de Pascal et d'étudier quelques applications.

3.1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que pour tout entier naturel m on a :

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} b_k \quad (4)$$

3.2. Quelques applications :

3.2.1. Montrer que pour tout entiers naturels k et m , on a :

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p p(p-1) \dots (p-k+1) \binom{m}{p} = (-1)^m m! \delta_{km} \quad (5)$$

Avec δ_{km} est delta Kroeneker défini par :

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & k = m, \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

3.2.2. En déduire que, pour tout entier naturel m et tout k dans $\{0, \dots, m\}$, on a :

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m m! \delta_{km} \quad (6)$$

Indication : Vous pouvez raisonner par récurrence.

Partie 4 :

Étude des inclusions $E_n \subset E_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

Soit f une fonction non constante de l'ensemble $\mathcal{F}_n$. Rappelons que les fonctions f et $f^{(n)}$ sont bornées, et posons :

$$M_0 = \|f\|_\infty, \quad M_n = \|f^{(n)}\|_\infty.$$

4.1. Soit x un réel et $h > 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) \right| \leq 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!} \quad (7)$$

4.2. En utilisant l'inégalité (7) ci-dessus pour tout h de $\{1, \dots, n-1\}$ et la formule (6).

Montrer l'existence $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n-1)}(x)| \leq C_1 M_n + C_2 M_0$$

4.3. Montrer que la fonction $f^{(k)}$ est bornée pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ou autrement dit $E_n \subset E_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

4.4. On pose $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

4.4.1. Montrer que $M_k > 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, et que $M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

4.4.2. Montrer que $M_k \leq 2^{k(n-1)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Cette majoration est la meilleure ?

Indication : Vous pouvez poser $a_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$, $1 \leq k \leq n$, et montrez que $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et que $(a_1 \cdots a_k)^n \leq (a_1 \cdots a_n)^k$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Fin du sujet