



المباراة العامة للعلوم والتقنيات

2011

مدة الإنجاز: 4 ساعات

الرياضيات

يوليوز 2011

حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة

تعاريف ورموز

تعريف 1

نعتبر دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ، وعددا صحيحا طبيعيا n يخالف الصفر.

نضع بالتوافق $f^{(0)} = f$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرة واحدة على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(1)} = f'$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f ، ونسمى $f^{(1)}$ الدالة المشتقة رتبة 1 للدالة f .

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة $f^{(1)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ حيث $(f^{(1)})'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(1)}$ ، ونسمى $f^{(2)}$ الدالة المشتقة رتبة 2 للدالة f .

بالترجع، نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ إذا كانت الدالة $f^{(n-1)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ في هذه الحالة نضع $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ حيث $(f^{(n-1)})'$ الدالة المشتقة للدالة $f^{(n-1)}$ ، ونسمى $f^{(n)}$ الدالة المشتقة رتبة n للدالة f .

نرمز بـ $\mathcal{F}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ لكل عدد طبيعي n غير منعدم؛ ونرمز بـ $\mathcal{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي معاملاتها أعداد حقيقية.

نتائج مقبولة يمكن استعمالها

أ- لتكن f و g دالتين من $\mathcal{F}$ ، وليكن α عددا حقيقيا. لدينا $f + g \in \mathcal{F}$ و $\alpha f \in \mathcal{F}$ ، ولكل عدد صحيح طبيعي n لدينا كذلك

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}.$$

ب- كل الدوال الحدودية المنتمية إلى المجموعة $\mathcal{P}$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{F}$.

تعريف 2

لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر المعادلة التفاضلية (E_P) التالية

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \quad (E_P)$$

تسمى هذه المعادلة التفاضلية بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة المرتبطة بالدالة الحدودية P ، وتسمى P بالدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) .
نقول أن دالة f من المجموعة $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا كانت f تحقق

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = 0$$

أى أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0$$

مثال وتذكير

ليكن λ عددا حقيقيا؛ نعتبر الدالة الحدودية P المنتمية إلى $\mathcal{P}$ والمعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = x - \lambda$$

P هي الدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y' - \lambda y = 0 \quad (E_P)$$

f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_P) إذا كانت f تحقق

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0$$

لكل x من $\mathbb{R}$.

نذكر أن حلول هذه المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي الدوال $x \mapsto ae^{\lambda x}$ ، حيث a عدد حقيقي.

الجزء الأول : نتائج أولية تخص الدوال الحدودية

1- لكل عدد صحيح طبيعي $1 \leq r$ نعتبر الدالة الحدودية ε_r المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$\varepsilon_r(x) = x^r.$$

أ- تحقق من أن لكل عدد صحيح طبيعي k ، وكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(k)}(x) = r(r-1)\dots(r-k+1)x^{r-k}, & 1 \leq k \leq r; \\ \varepsilon_r^{(k)}(x) = 0, & k \geq r+1. \end{cases}$$

ب- استنتج قيمة العدد $\varepsilon_r^{(k)}(0)$ لكل عدد صحيح طبيعي k .

2- لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي k ، محصور بين 0 و n ، لدينا $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

ب- استنتج أن دالتين حدوديتين Q و R من $\mathcal{P}$ متساويتان إذا، فقط إذا، كانت معاملتهما متساوية.

إشارة : يمكن اعتبار الدالة الحدودية $P = R - Q$.

3- لتكن P و Q دالتين حدوديتين من $\mathcal{P}$ وليكن λ عددا حقيقيا حيث $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$ لكل عدد حقيقي x . نضع

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

بين أن معاملات الدالتين الحدوديتين P و Q تحقق العلاقات التالية

$$\begin{cases} a_0 = -\lambda b_0 ; \\ a_k = b_{k-1} - \lambda b_k, \quad 1 \leq k \leq n-1 ; \\ a_n = b_{n-1}. \end{cases}$$

الجزء الثاني : دراسة معادلات تفاضلية خطية من الدرجة الأولى

ليكن λ عددا حقيقيا و g دالة من المجموعة $\mathcal{F}$. نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية التالية

$$y' - \lambda y = g \quad (F_g).$$

نقول أن دالة f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية (F_g) إذا كانت f تحقق $f'(x) - \lambda f(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

1- لتكن f من $\mathcal{F}$ حلا للمعادلة التفاضلية (F_g) .

أ- أحسب الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ بدلالة الدالة g .

ب- استنتج أن الدالة f يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$f(x) = G(x)e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث G دالة أصلية للدالة $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$ ، المعرفة على $\mathbb{R}$.

ج- تحقق أن كل دالة

$$h : x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$$

حيث G دالة أصلية للدالة $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$ ، حل للمعادلة التفاضلية الخطية (F_g) .

2- لتكن R دالة حدودية من $\mathcal{P}$. في هذا السؤال، نضع $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$ لكل x من $\mathbb{R}$. بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية (F_g) هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ حيث S دالة حدودية من $\mathcal{P}$ تحقق

$$S'(x) = R(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3- لتكن R دالة حدودية من $\mathcal{P}$ ، و α عددا حقيقيا يخالف العدد λ . في هذا السؤال، نضع $g(x) = R(x)e^{\alpha x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أ- ليكن μ عددا حقيقيا غير منعدم. بين أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$ هي الدوال $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ و R_1 دالة حدودية من $\mathcal{P}$ تحقق

$$R_1'(x) + \mu R_1(x) = R(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

بين وحدانية الدالة الحدودية R_1 .

إشارة : يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء.

ب- بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية (F_g) هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ و S الدالة الحدودية الوحيدة من $\mathcal{P}$ التي تحقق

$$S'(x) + (\alpha - \lambda)S(x) = R(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

الجزء الثالث : دراسة بعض المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من نوع (E_P)

لتكن P دالة حدودية من $\mathcal{P}$ معرفة لكل x من $\mathbb{R}$ كما يلي

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) التالية

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \quad (E_P)$$

1- بين أنه إذا كانت الدالتان f و g من $\mathcal{F}$ حلين للمعادلة (E_P) ، و α عددا حقيقيا، فإن الدالة $\alpha f + g$ هي كذلك حل لنفس المعادلة (E_P) .

2- الحالة الأولى : $P(x) = x^n$ لكل x من $\mathbb{R}$. نفترض في هذا السؤال أن $P(x) = x^n$ لكل x من $\mathbb{R}$. بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي الدوال الحدودية التي تنتمي إلى $\mathcal{P}$ والتي لا تتعدى درجتها $(n-1)$.

3- الحالة الثانية : $P(x) = (x - \lambda)^n$ لكل x من $\mathbb{R}$. ليكن λ عددا حقيقيا، و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم حيث $P(x) = (x - \lambda)^n$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أ- صيغة ليبينيتز لاشتقاق جداء
لتكن f و g دالتين من $\mathcal{F}$. بين بالترجع أن الدالة fg تنتمي إلى $\mathcal{F}$ و أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم r لدينا

$$(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}$$

حيث نرمز ب $\binom{r}{k}$ إلى العدد الصحيح الطبيعي المعروف كما يلي

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad 0 \leq k \leq r.$$

إشارة : يمكن استعمال صيغة باسكال التالية

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

ب- بين أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي المعادلة التفاضلية

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-\lambda)^{n-r} y^{(r)} = 0.$$

ج- لتكن f دالة من $\mathcal{F}$. نضع $h(x) = f(x)e^{-\lambda x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.
أحسب الدالة $h^{(n)}$ ، المشتقة رتبة n للدالة h ، واستنتج أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا، وفقط إذا، وجدت دالة حدودية R ، تنتمي إلى $\mathcal{P}$ ولا تتعدى درجتها $(n-1)$ ، وتحقق

$$f(x) = R(x)e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4- نفترض في هذا السؤال أن هناك دالة حدودية Q من $\mathcal{P}$ ، وعددا حقيقيا λ يحققان

$$P(x) = (x - \lambda)Q(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

أ- بين أن دالة f من $\mathcal{F}$ حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) إذا، وفقط إذا، كانت الدالة $f_1 = f' - \lambda f$ حلا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_Q) .
إشارة : يمكن استعمال نتائج السؤال 3 من الجزء الأول.

ب- باعتماد مبدأ التراجع، أوجد طريقة أخرى للإجابة عن الاستنتاج المطلوب في السؤال 3-ج أعلاه دون اللجوء إلى استعمال صيغة ليبنيتز لاشتقاق جداء.

5- تطبيق 1

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y^{(2)} - 5y^{(1)} - 2y = 0, \quad (E_P).$$

أ- تحقق أن الدالة الحدودية المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي الدالة الحدودية المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = (x-2)(x+1)^3.$$

ب- باستعمال النتائج السابقة، بين أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{-x} + ce^{2x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ ، و S دالة حدودية من $\mathcal{P}$ لا تتعدى درجتها 2.

6- ليكن r عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم، و لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ أعدادا حقيقية مختلفة مثنى مثنى، و $n_1, n_2, \dots, n_r$ أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة؛ نضع $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ ونرمز ب P الى الدالة الحدودية المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}.$$

بين بالتراجع على n أن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (E_P) هي الدوال

$$x \mapsto P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_r(x)e^{\lambda_r x}$$

حيث لكل عدد k من المجموعة $\{1, \dots, r\}$ ، P_k دالة حدودية من $\mathcal{P}$ لا تتعدى درجتها $k-1$.
إشارة : يمكن استعمال نتائج السؤال 4-أ من الجزء الثالث.

7- تطبيق 2

أ- نعتبر دالة حدودية P معرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد صحيحة نسبية و a_0 يخالف الصفر.
بين أنه إذا كان عدد صحيح نسبي u جذرا للدالة الحدودية P فإن u قاسم للعدد a_0 .

ب- نأخذ P بحيث

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

حدد الحلول الصحيحة النسبية للمعادلة $P(x) = 0$ ثم عمل الحدودية P .

ج- نعتبر الدالة الحدودية R المعرفة، لكل x من $\mathbb{R}$ ، بما يلي

$$R(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

• ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم؛ نضع $y = (x + \frac{1}{x})$. بين أن $\frac{R(x)}{x^3} = P(y)$ ثم استنتج أن

$$R(x) = (x+1)^2(x-1)^4.$$

• أعط الحل العام في $\mathcal{F}$ للمعادلة الخطية المتجانسة

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} - y^{(4)} + 4y^{(3)} - y^{(2)} - 2y' + y = 0.$$
